



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

09F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز - ۱۴۰۰/۰۳/۱۰

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	میلاد حسینی نامی
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنوند
	سید جواد نظری

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- هرگاه $f = \{(m, 2m-1)(3, 2)(m, 3)(4, -1)\}$ یک تابع باشد، تابع $f \circ f$ کدام است؟

- (۱) $\{(2, 3)(3, 2)\}$ (۲) $\{(2, 2)(3, 2)\}$ (۳) $\{(2, 2)(3, 3)\}$ (۴) $\{(3, 3)(2, 2)(4, 2)\}$

پاسخ: گزینه ۳

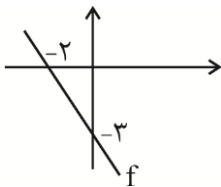
برای آن که f تابع باشد، نباید مؤلفه اول تکراری داشته باشد، به عبارتی هیچ دو زوج مرتب با مؤلفه اول برابر دیده نشود.

$$\begin{aligned} f(m) &= 2m-1 \\ f(m) &= 3 \\ f &= \{(2, 3)(3, 2)(4, -1)\} \end{aligned}$$

حال تابع مرکب $f \circ f$ را به دست می آوریم:

$$f \circ f = \{(2, 2)(3, 3)\}$$

۲- نمودار تابع f شکل مقابل است، هرگاه $2f - g$ تابعی ثابت باشد به طوریکه $f(-1) = 2g(2)$ ، مقدار $g(\frac{1}{4})$ کدام است؟



- (۱) $4/5$
(۲) $-1/5$
(۳) $-2/5$
(۴) 6

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ضابطه f را به دست می آوریم، f تابعی خطی است:

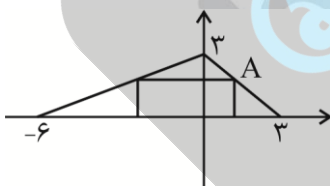
$$f(x) = -\frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow 2f(x) = -3x - 6$$

برای آن که $2f - g$ تابعی ثابت باشد، لازم است g تابعی خطی با شیب -3 باشد، یعنی:

$$g(x) = -3x + \alpha$$

$$f(-1) = 2g(2) \Rightarrow -\frac{3}{2} = -12 + 2\alpha \Rightarrow 2\alpha = \frac{21}{2} \Rightarrow g(x) = -3x + \frac{21}{4} \Rightarrow g(\frac{1}{4}) = \frac{18}{4} = 4/5$$

۳- در شکل مقابل، مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب طول نقطه A نوشته ایم، ضابطه آن تابع کدام است؟

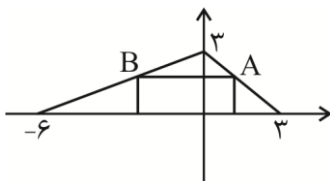


- (۱) $f(x) = 2x(x-3)$
(۲) $f(x) = 3x(3-x)$
(۳) $f(x) = x(3-x)$
(۴) $f(x) = (x+4)(3-x)$

پاسخ: گزینه ۲

A روی خط $y = -x + 3$ است.

B روی خط $y = \frac{x}{2} + 3$ است.



هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



چون چهار ضلعی مستطیل است، پس فرض کنیم $A \begin{vmatrix} \alpha \\ 3-\alpha \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} \beta \\ \frac{\beta}{2}+3 \end{vmatrix}$ داریم:

$$y_A = y_B \Rightarrow -\alpha + 3 = \frac{\beta}{2} + 3 \Rightarrow \beta = -2\alpha$$

مساحت مستطیل:

$$S = (\alpha - (\beta)) \cdot (3 - \alpha) \Rightarrow S = (\alpha + 2\alpha)(3 - \alpha) = 3\alpha(3 - \alpha)$$

پس ضابطه تابع بر حسب طول نقطه A (x)، ضابطه زیر است:

$$S(x) = 3x(3 - x), \quad 0 < x < 3$$

۴- هرگاه برد تابع $f(x) = x^2 - 2ax + 3a$ بازه $(2, +\infty)$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۲ یا ۱ ۳) ۱ یا ۳ ۴) ۱ یا ۲

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $a \neq 0$ آنگاه:

$$a > 0 \quad R_f = [f(-\frac{b}{2a}), +\infty)$$

$$a < 0 \quad R_f = (-\infty, f(-\frac{b}{2a})]$$

چون f یک سهمی با ضریب x^2 مثبت است، پس:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2} = a \Rightarrow f(a) = 2$$

$$f(a) = a^2 - 2a^2 + 3a = 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{هر دو جواب به دست آمده، قابل قبول است.}$$

۵- دو تابع $f(x) = \frac{3}{x-2}$ و $g(x) = \frac{ax+b}{2x^2+cx+8}$ با هم برابرند، مقدار b کدام است؟

۱) ۱۲- ۲) ۸- ۳) ۶- ۴) ۴-

پاسخ: گزینه ۱

دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به شرطی برابرند که:

$$\begin{cases} D_f = D_g \\ x \in D : f(x) = g(x) \end{cases}$$

چون $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ پس $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ ، به همین جهت $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج است:

$$2x^2 + cx + 8 = 2(x-2)^2$$

$$2x^2 + cx + 8 = 2x^2 - 8x + 8 \Rightarrow c = -8$$

$$g(x) = \frac{a(x + \frac{b}{a})}{2(x-2)^2}$$

از طرفی:

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



باید $\frac{b}{a} = -2$ و $b = -2a$ در این صورت:

$$g(x) = \frac{a(x-2)}{2(x-2)^2} = \frac{\frac{a}{2}}{x-2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6 \xrightarrow{b=-2a} b = -12$$

۶- اگر $f = \{(1,4)(4,0)(2,1)(0,1)\}$ و $g(x) = 2x - \sqrt{x}$ ، جمع اعضای برد تابع $y = \text{gof}$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تابع gof را پیدا می‌کنیم، از دامنه f شروع می‌کنیم و داریم:

$$\text{gof} = g(f(x))$$

$$\Rightarrow x=1 \quad g(f(1)) = g(4) = 8-2=6 \Rightarrow (1,6) \in \text{gof}$$

$$x=4 \quad g(f(4)) = g(0) = 0 \Rightarrow (4,0) \in \text{gof}$$

$$x=2 \quad g(f(2)) = g(1) = 1 \Rightarrow (2,1) \in \text{gof}$$

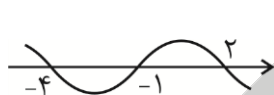
$$x=0 \Rightarrow g(f(0)) = g(1) = 1 \Rightarrow (0,1) \in \text{gof}$$

$$\Rightarrow \text{gof} = \{(1,6)(4,0)(2,1)(0,1)\}$$

حال می‌توانیم برد gof را به دست آوریم:

$$\Rightarrow R_{\text{gof}} = \{6,0,1\}$$

$$\Rightarrow \text{جمع} = 7$$



۷- نمودار f به شکل مقابل است، دامنه تعریف $y = \sqrt{(x-1) \cdot f(x+1)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۵ (۲)

۴ (۱)

۴ بی‌شمار

۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

برای یافتن دامنه تعریف تابع نامعادله $(x-1)f(x+1) \geq 0$ را حل می‌کنیم:

	-۵	-۲	۱	
$f(x+1)$	+	-	+	-
$x-1$	-	-	-	+
$(x-1)f(x+1)$	-	+	-	-

$$\text{پس: } D_y = [-5, -2] \cup \{1\}$$

اعداد صحیح در دامنه، $\{-5, -4, -3, -2, 1\}$ هستند.

۸- در تابع $f(x) = 4x + 2a$ اگر $f(2a) - f(a) = 8$ ، مقدار $f^{-1}(a)$ چه عددی است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ابتدا با توجه به رابطه $f(2a) - f(a) = 8$ مقدار a را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f(2a) &= 4a + 2a = 6a \\ f(a) &= 4a + 2a = 6a \end{aligned} \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow \underline{a=2}$$

پس $f(x) = 4x + 4$ به این ترتیب $y = 4x + 4$

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(2) = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{پس } f^{-1}(x) = \frac{x-4}{4} \quad \text{لذا:}$$

۹- هرگاه $f(x) = \frac{2-3x}{2}$ و $f+g = \{(2,3), (-2,5), (0,1)\}$ وارون تابع g کدام است؟

$$\begin{aligned} \{(2,-1), (-2,3), (0,2)\} & \quad (1) \\ \{(-1,3), (5,-2), (0,2)\} & \quad (2) \\ \{(2,5), (-2,-1), (0,-1)\} & \quad (3) \\ \{(5,2), (1,-2), (0,0)\} & \quad (4) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴

طبق تعریف تفاضل دو تابع:

$$(g-f)(x) = g(x) - f(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

یعنی برای x مشترک از دامنه تعریف، مقادیر آنها را کم می کنیم.
ابتدا زوج هایی از f که با $f+g$ دامنه مشترک دارند را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \frac{2-3x}{2} \Rightarrow f = \{(2,-2), (-2,4), (0,1)\}$$

از طرفی $g = (f+g) - f$:

$$\begin{aligned} f+g &= \{(2,3), (-2,5), (0,1)\} \\ f &= \{(2,-2), (-2,4), (0,1)\} \end{aligned} \Rightarrow g = \{(2,5), (-2,1), (0,0)\}$$

حال با جابه جایی زوج های g تابع g^{-1} را به دست می آوریم:

$$g^{-1} = \{(5,2), (1,-2), (0,0)\}$$

۱۰- اگر $f = \{(1,2a-3), (2,2a-3), (3,a), (4,1)\}$ و $g = \{(2,3a), (3,a+1), (4,-a)\}$ به ازاء کدام مقدار a تابع $f-g$ تابعی یک به یک نیست؟

$$\begin{array}{cccc} 2(1) & -2(2) & -3(3) & +3(4) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر f, g دو تابع باشند، آنگاه:

$$(f \pm g)(\alpha) = f(\alpha) \pm g(\alpha), \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

به عبارتی به ازاء مؤلفه های اول برابر، مؤلفه دوم را از هم کم می کنیم تا $f-g$ به دست آید.

ابتدا تابع $f-g$ را مشخص می کنیم:

$$f-g = \{(2,2a-3-3a), (3,a-(a+1)), (4,1-(-a))\}$$

$$f-g = \{(2,-a-3), (3,-1), (4,1+a)\}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



برای آن که $f - g$ تابعی یک به یک باشد، نباید مؤلفه دوم تکراری داشته باشد.

$$-a - 3 \neq -1 \Rightarrow a \neq -2$$

$$-a - 3 \neq 1 + a \Rightarrow a \neq -2$$

$$1 + a = -1 \Rightarrow a \neq -2$$

پس اگر $a = -2$ تابع یک به یک نمی باشد و در سایر مقادیر یک به یک است.

۱۱- اگر برای چند جمله ای f شرط $f(2x) + f^{-1}(3) = 4x + 9$ برقرار باشد، مقدار $f^{-1}(-1)$ چه عددی است؟

$$-4 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$-8 \quad (2)$$

$$-9 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \\ f^{-1} \circ f(x) = x \end{cases}$$

نکته: f تابعی وارون پذیر باشد، آنگاه:

در تساوی داده شده، $x = \frac{1}{4}f^{-1}(3)$ قرار می دهیم و داریم:

$$f\left(\frac{1}{4}f^{-1}(3)\right) + f^{-1}(3) = 4 \times \frac{1}{4}f^{-1}(3) + 9$$

$$3 + f^{-1}(3) = 2f^{-1}(3) + 9 \Rightarrow f^{-1}(3) = -6$$

$$\Rightarrow f(2x) - 6 = 4x + 9 \Rightarrow f(2x) = 4x + 15 \Rightarrow f(x) = 2x + 15 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-15}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(-1) = \frac{-1-15}{2} = -8$$

۱۲- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & x \geq 2 \\ g(x) & x < 2 \end{cases}$ تابعی وارون پذیر باشد، ضابطه $y = g(x)$ کدام می تواند باشد؟

$$x \quad (4)$$

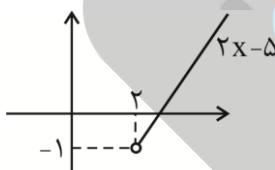
$$4x-10 \quad (3)$$

$$3-6x \quad (2)$$

$$2x+1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

برای آن که بدانیم با کدام شرط f وارون پذیر خواهد شد، از رسم نمودار کمک می گیریم.



پس باید ضابطه $g(x)$ را چنان انتخاب کنیم که برد آن با برد $y = 2x - 5$ اشتراکی نداشته باشد، مانند گزینه ۳.

البته می توانیم تک تک گزینه ها را در کنار $y = 2x - 5$ در یک دستگاه رسم کنیم و علت وارون ناپذیری سایر گزینه ها را معلوم کنیم.

۱۳- تابع $f(x) = x - \frac{2}{x}$ با شرط $x > 0$ داده شده است، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می کند؟

$$-4 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش اول:

ابتدا $y = f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم:

$$y = x - \frac{2}{x} \Rightarrow yx = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - yx - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 8}}{2}$$

از طرفی $f^{-1}(1) = -1$ پس $f(-1) = 1$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{2} & f^{-1}(1) = \frac{1+3}{2} = 2 \\ f^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{2} & f^{-1}(1) = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

غقیق

پس $f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}$ حال آن را با نیمساز ناحیه دوم تلاقی می دهیم:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8} = -3x \quad x < 0$$

$$x^2 + 8 = 9x^2 \Rightarrow 8x^2 = 8 \Rightarrow x = -1 \quad A \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

نقطه تلاقی است.

روش دوم:

$$y = x - \frac{2}{x} \Rightarrow \text{معکوس} \Rightarrow x = y - \frac{2}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{نیمساز ناحیه ۲}} y = -x \Rightarrow x = -x - \frac{2}{-x} \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

غقیق

۱۴- اگر $a \neq 0$ و f تابعی یک به یک باشد، وارون تابع $g(x) = af(x+a)$ کدام است؟

$$g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + a \quad (۲)$$

$$g^{-1}(x) = f^{-1}(ax) + 1 \quad (۱)$$

$$g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \quad (۴)$$

$$g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - a \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

اگر f تابعی یک به یک باشد، آنگاه $y = mf(ax+b)$ به شرط آن که تابعی ثابت نشود، الزاماً یک به یک است.

برای یافتن ضابطه ی معکوس ابتدا فرض می کنیم:

$$y = af(x+a) \Rightarrow \frac{y}{a} = f(x+a)$$

$$f^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) = x+a \Rightarrow x = f^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) - a \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - a$$

۱۵- هرگاه $f = \{(1, -1), (2, -3), (3, 2)\}$ و $f + g = \{(1, 0), (3, 1)\}$ ، تابع $g - f$ کدام است؟

$$\{(1, 2), (3, -3)\} \quad (۴) \quad \{(1, -2), (3, 3)\} \quad (۳) \quad \{(2, -1)\} \quad (۲) \quad \{(2, -4)\} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: با توجه به تعریف $(kf)(x) = kf(x)$ یعنی فقط کافی است مؤلفه دوم، k برابر شود.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ابتدا تابع $۲f$ را پیدا می‌کنیم.

$$۲f = \{(1, -2)(2, -6)(3, 4)\}$$

پس دقت کنید:

$$g - f = (f + g) - ۲f$$

پس برای x مشترک کافی است مقادیر آنها را از هم کم کنیم:

$$(f + g) - ۲f = \{(1, 0)(3, 1)\} - \{(1, -2)(2, -6)(3, 4)\} = \{(1, 2)(3, -3)\}$$

$$\Rightarrow g - f = \{(1, 2)(3, -3)\}$$

۱۶- اگر $f(x) = ax - x^2$ و $g(x) = 2 - x$ و حاصل ضرب جواب‌های $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ برابر ۳- باشد، مقدار a کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۴

(۲) -۳

(۱) ۶

پاسخ: گزینه ۱

طبق تعریف ترکیب توابع ابتدا دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = ag(x) - g^2(x) = a(2 - x) - (2 - x)^2 = -x^2 + (4 - a)x + 2a - 4$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2 - f(x) = 2 + x^2 - ax$$

پس در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$-x^2 + (4 - a)x + 2a - 4 = x^2 - ax + 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 6 - 2a = 0 \Rightarrow \frac{6 - 2a}{2} = -3 \Rightarrow 6 - 2a = -6 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

۱۷- اگر $f = \{(1, 3)(3, -1)(2, 1)\}$ و $f \circ f^{-1}$ با کدام برد است؟(۴) $\{0, 5\}$ (۳) $\{1, 2\}$ (۲) $\{-1, 5\}$ (۱) $\{0\}$

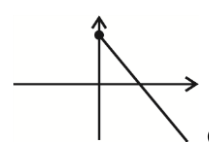
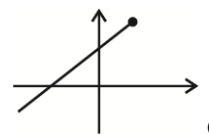
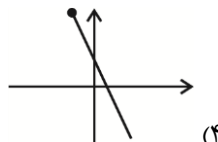
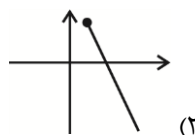
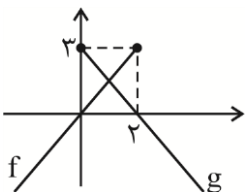
پاسخ: گزینه ۴

با توجه به اعمال بین توابع ابتدا f^{-1} سپس $f + f^{-1}$ را به دست می‌آوریم و سپس تابع مرکب را به دست می‌آوریم:

$$f = \{(1, 3)(3, -1)(2, 1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(3, 1)(-1, 3)(1, 2)\} \Rightarrow f + f^{-1} = \{(1, 5)(3, 0)\}$$

حال تابع $(f + f^{-1}) \circ f$ را به دست می‌آوریم:

$$(f + f^{-1}) \circ f = \{(1, 0), (2, 5)\}$$

پس برد تابع به دست آمده مجموعه $\{0, 5\}$ است.۱۸- هرگاه نمودار توابع $y = f(x)$, $y = g(x)$ شکل مقابل باشد، نمودار $y = f \circ g(x)$ به کدام صورت است؟

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نمودار توابع خطی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ داریم:

$$f(x) = \frac{3}{2}x \quad x \leq 2$$

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad x \geq 0$$

برای یافتن ضابطه $y = fog$ داریم:

$$y = fog(x) = f(g(x)) = \frac{3}{2}g(x) = \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}x + 3\right)$$

$$fog(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{2}$$

اما فراموش نکنیم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$x \geq 0, \quad -\frac{3}{2}x + 3 \leq 2 \Rightarrow -\frac{3}{2}x \leq -1 \quad x \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{پس } fog(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{2} \text{ که } x \geq \frac{2}{3}$$

۱۹- به فرض آن که $f(x) = \sqrt{4-2x}$ ، دامنه تعریف $y = f \circ f(x)$ کدام است؟

$$[0, +\infty) \quad (۴)$$

$$[0, 2] \quad (۳)$$

$$(-\infty, 0] \quad (۲)$$

$$(-\infty, 2] \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{نکته: } D_{fog} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$\text{ابتدا دامنه } f \text{ را به دست می آوریم } D_f = (-\infty, 2] \Rightarrow 4-2x \geq 0$$

$$D_{fof} = \{x : x \in D_f, f(x) \in D_f\}$$

$$x \leq 2, \quad \sqrt{4-2x} \leq 2$$

$$\sqrt{4-2x} \leq 2 \Rightarrow 4-2x \leq 4 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_{fof} = [0, 2]$$

$$۲۰- \text{ اگر } f(x) = \frac{x}{2x-1}, g(x) = \frac{x}{1-x}, \text{ ضابطه } g \circ f(x) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{x}{3x+1} \quad (۴)$$

$$\frac{x}{x+1} \quad (۳)$$

$$\frac{x}{x-1} \quad (۲)$$

$$\frac{x}{3x-1} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$\text{نکته: } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

حالت خاص در تابع هموگرافیک، هرگاه $a+d=0$ آنگاه $f^{-1}(x) = f(x)$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



برای حل، در تساوی $g \circ f(x) = \frac{x}{1-x}$ به جای x قرار می‌دهیم $f^{-1}(x)$ و داریم:

$$g \circ f \left(\frac{f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)} \right) = \frac{f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)} \Rightarrow g(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)}$$

اما با توجه به آن که $f(x) = \frac{x}{2x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\frac{x}{2x-1}}{1-\left(\frac{x}{2x-1}\right)} = \frac{\frac{x}{2x-1}}{\frac{2x-1-x}{2x-1}} = \frac{x}{x-1}$$

روش دوم: عدد گذاری:

$$g\left(\frac{x}{2x-1}\right) = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = -2$$

فقط در گزینه ۲، $g\left(\frac{2}{3}\right) = -2$ می‌باشد:

۲۱- هرگاه $g(x) = 2x - 2[x-1]$ و $f(x) = x^2 - 2x$ برد تابع $y = f \circ g(x)$ کدام است؟

(۴) $(-1, 4)$

(۳) $[-1, 0]$

(۲) $[0, 4]$

(۱) $[0, 8]$

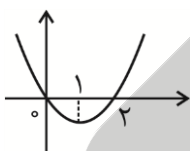
پاسخ: گزینه ۱

نکته: می‌دانیم $f(x) = x - [x]$ آنگاه $0 \leq f(x) < 1$ ابتدا تابع $y = g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = 2x - 2([x] - 1) = 2x - 2[x] + 2 \Rightarrow g(x) = 2(x - [x]) + 2$$

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ پس $2 \leq g(x) < 4$.

از طرفی با توجه به نمودار $y = x^2 - 2x$ که شکل مقابل است:



برای یافتن برد $y = f \circ g(x)$ می‌دانیم برد g را می‌توان به عنوان دامنه f در نظر بگیریم و چون f در بازه $[2, 4]$ صعودی اکید است، پس:

$$f(x) = x^2 - 2x, 2 \leq x < 4 \Rightarrow R_f = [f(2), f(4)) \Rightarrow R_f = [0, 8)$$

۲۲- هرگاه $a > 0$ ، نمودار کدام تابع از هر چهار ناحیه محورهای مختصات عبور می‌کند؟

(۴) $y = |x+a| - 2a$

(۳) $y = a - |x-2a|$

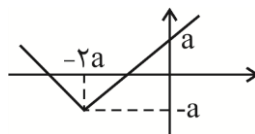
(۲) $y = |x-2a| + a$

(۱) $y = |x+2a| - a$

پاسخ: گزینه ۴

تک تک نمودارها را با فرض $a > 0$ رسم می‌کنیم.

$$y = |x+2a| - a$$

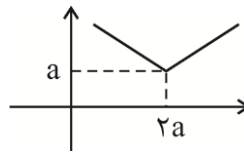


گذرنده از نواحی ۱ و ۲ و ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

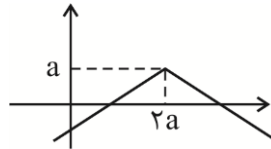


$$y = |x - 2a| + a$$



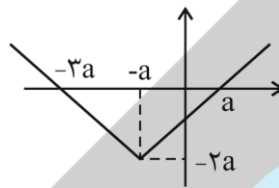
گذرنده از نواحی ۱ و ۲

$$y = a - |x - 2a|$$



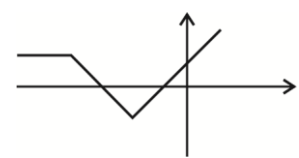
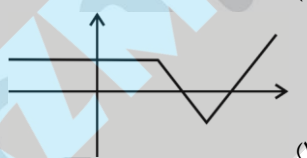
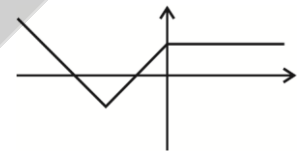
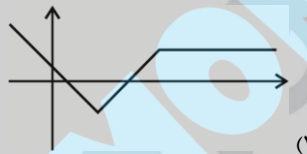
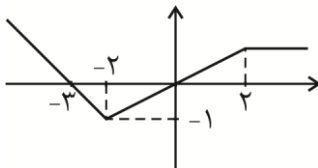
گذرنده از نواحی ۱ و ۳ و ۴

$$y = |x + a| - 2a$$



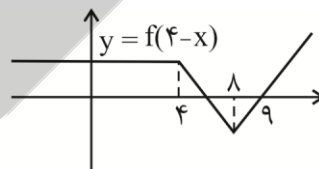
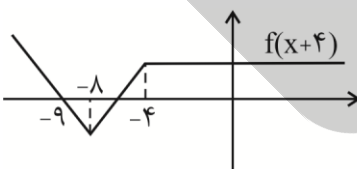
گذرنده از هر ۴ ناحیه

۲۲- نمودار $y = f(x - 2)$ شکل مقابل است، نمودار $y = f(4 - x)$ شبیه به کدام گزینه است؟



پاسخ: گزینه ۴

با داشتن نمودار $y = f(x - 2)$ ، ابتدا آن را ۶ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم $y = f(x + 6 - 2)$ ، یعنی $y = f(x + 4)$ به دست می‌آید. سپس نمودار حاصل را نسبت به محور عرض‌ها بازتاب می‌کنیم تا نمودار $y = f(4 - x)$ به دست آید:



۲۴- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x}$ ، کدام نمودار، محورهای مختصات را قطع نمی‌کند؟

$$y = f(x - 4) + 2 \quad (۴)$$

$$y = f(x + 5) - 3 \quad (۳)$$

$$y = f(x - 3) + 2 \quad (۲)$$

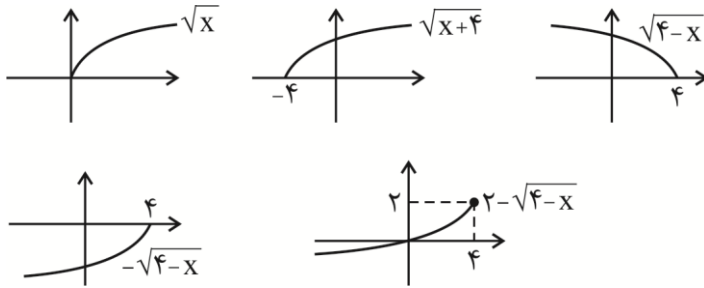
$$y = f(x + 2) - 1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

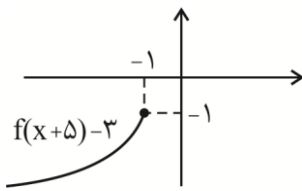
هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم، برای این منظور مرحله به مرحله جلو می‌رویم:



اگر نمودار به سمت راست یا به سمت بالا انتقال یابد، لاقط یکی از محورها را قطع می‌کند، اما $y = f(x+5) - 3$ نمودار را ۵ واحد به چپ و سه واحد به پایین انتقال می‌دهد و شکل محورهای مختصات را قطع نمی‌کند.



۲۵- نمودار سهمی $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را دو واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، نمودار حاصل خط $y = x - 1$ را در نقاطی به طول α و β قطع می‌کند، مقدار $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

$\frac{1}{2} (۱)$
 $-\frac{3}{2} (۲)$
 $-\frac{1}{2} (۳)$
 $\frac{3}{2} (۴)$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا نمودار f را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم:

$$y = f(x+2) = (x+2)^2 - 2(x+2) + 3$$

$$y = x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 + 3 \Rightarrow y = x^2 + 2x + 3$$

حال آن را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، در این حالت کافی است y را به $-y$ تبدیل کنیم، پس ضابطه به‌دست آمده برابر است با:

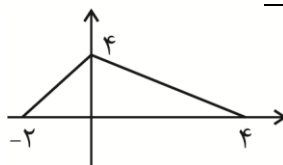
$$y = -x^2 - 2x - 3$$

حال، آن را با $y = x - 1$ قطع می‌دهیم:

$$-x^2 - 2x - 3 = x - 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

۲۶- اگر نمودار f به شکل مقابل باشد، حدود a کدام باشد، تا نمودار $y = f(a-x)$ از ناحیه دوم عبور نکند؟



$$-4 \leq a \leq 2 (۲)$$

$$a \leq -2 (۴)$$

$$-2 \leq a \leq 4 (۱)$$

$$a \geq 4 (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



اگر نمودار f را ۴ واحد و یا بیش از ۴ واحد به سمت چپ انتقال دهیم و سپس آن را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، آنگاه شکل حاصل از ناحیه دوم عبور نخواهد کرد.

نکته: دقت کنید، برای رسم $y = f(a - x)$ ، ابتدا نمودار f را a واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. پس: $a \geq 4$.

۲۷- اگر نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ را سه واحد به راست و دو واحد به پایین انتقال دهیم به ضابطه $y = (x-1)^3$ می‌رسیم، مقدار $a+b$ کدام است؟

۴) صفر

۳) -۶

۲) ۲۴

۱) ۱۸

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر k عددی مثبت باشد و نمودار $y = f(x)$ داده شده باشد، آنگاه:

نمودار f را k واحد به سمت راست انتقال می‌دهد. $y = f(x-k)$

نمودار f را k واحد به چپ انتقال می‌دهد. $y = f(x+k)$

نمودار f را k واحد به بالا انتقال می‌دهد. $y = f(x) + k$

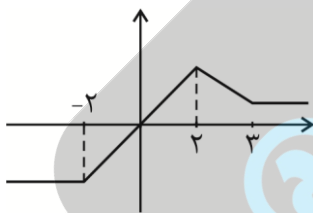
نمودار f را k واحد به پایین انتقال می‌دهد. $y = f(x) - k$

دقت کنید به جای آن که f را ۳ واحد به راست و ۲ واحد به پایین انتقال دهیم، ضابطه $y = (x-1)^3$ را ۳ واحد به چپ و ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا به f برسیم.

$$y = (x-1)^3 \xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{واحد به چپ}} y = (x+3-1)^3 + 2 = (x+2)^3 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=12 \end{cases} \Rightarrow a+b=18$$

۲۸- اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، بزرگترین بازه‌ای که تابع $y = -f(1 - \frac{x}{4})$ در آن بازه اکیداً صعودی است، کدام است؟

۱) $[0, 2]$ ۲) $[-4, -2]$ ۳) $[-2, 2]$ ۴) $[-2, 6]$ 

پاسخ: گزینه ۴

اگر قرار باشد $-f(1 - \frac{x}{4})$ صعودی اکید باشد، پس کافی است $f(1 - \frac{x}{4})$ نزولی اکید باشد و چون عبارت $1 - \frac{x}{4}$ نزولی اکید است، پس نهایتاً باید $f(x)$ صعودی اکید باشد. تا این‌جا باید بپذیریم بازه‌ای را می‌خواهیم که f صعودی اکید باشد، این بازه $[-2, 2]$ است، اما دقت کنید باید $2 \leq 1 - \frac{x}{4} \leq -2$.

$$\Rightarrow -3 \leq -\frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{4} \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 6$$

پس بازه نهایی $[-2, 6]$ است.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۹- هرگاه $f(x) = (\frac{1}{x})^{1-x}$ ، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(x) - f(\frac{4}{x})}$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 (۲) $(-2, 0) \cup [2, +\infty)$
 (۳) $[-2, +\infty) - \{0, 2\}$
 (۴) $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: دامنه تعریف $y = \log_{\alpha} f(x)$ با شرط $f(x) > 0$ به دست می آید، برای آن که دامنه تعریف $y = \sqrt{f(x) - f(\frac{4}{x})}$ را به دست آوریم، باید

شرط $f(x) \geq f(\frac{4}{x})$ را داشته باشیم، از آن جایی که تابع f اکیداً صعودی است، پس: $f(x) \geq f(\frac{4}{x}) \rightarrow x \geq \frac{4}{x}$
 (دقت کنید ضابطه f تنها برای تشخیص یکنوایی f لازم بود)

$$x \geq \frac{4}{x} \Rightarrow \begin{cases} x > 0: x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \\ x < 0: x \geq \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 0) \cup [2, +\infty)$$

۳۰- حدود m کدام باشد تا $f = \{(4, 4m-2), (0, m^2-4), (1, 3m)\}$ تابعی اکیداً صعودی باشد؟

- (۱) $2 < m < 4$ (۲) $-1 < m < 4$ (۳) $m \geq 4$ (۴) $m < -1$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا تابع را به شکل $f = \{(0, m^2-4), (1, 3m), (4, 4m-2)\}$ مرتب می کنیم، برای آن که f اکیداً صعودی باشد، باید شرط زیر برقرار باشد:

$$m^2 - 4 < 3m < 4m - 2$$

این دو نامعادله را حل می کنیم و جواب آنها را اشتراک می گیریم:

$$m^2 - 4 < 3m \Rightarrow m^2 - 3m - 4 < 0 \Rightarrow (m+1)(m-4) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < 4$$

$$\Rightarrow 3m < 4m - 2 \Rightarrow m > 2 \quad \left. \begin{matrix} -1 < m < 4 \\ m > 2 \end{matrix} \right\} 2 < m < 4$$

